

8 Локальная теорема де Муавра-Лапласа

Теорема. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(m)$ появления события A в n испытаниях равно m раз приближенно равна значению функции:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (18)$$

В связи с трудностями вычисления по формуле (18) созданы специальные таблицы, представленные в приложении 2.

На практике применяют локальную теорему в виде:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x = \frac{|m - np|}{\sqrt{npq}}$$

Пример 1. Найти вероятность того, что 80 из 1000 покупателей приобретут мужскую обувь, если вероятность покупки обуви $p=0,11$ (по данным из наблюдений за предыдущий период).

Решение. $p=0,11$ $q=1-0,11=0,89$ $n=1000$ $m=80$

$$x = \frac{|80 - 1000 \cdot 0,11|}{\sqrt{1000 \cdot 0,11 \cdot 0,89}} = \frac{|-30|}{\sqrt{97,9}} = \frac{30}{9,9} = 3,03$$

$$P_{1000}(80) \approx \frac{\varphi(3,03)}{\sqrt{97,9}} \approx \frac{0,0040}{9,9} \approx 0,0004$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ четная, то $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вероятность того, что элемент прибора не выйдет из строя, равна 0,8. Какова вероятность того, что из 600 элементов прибора за время его работы не выйдет из строя 450 элементов?

2. На каждые 100 посеянных зерен всходит в среднем 85. Какова вероятность того, что из 1000 посеянных зерен взойдет 840?

3. В банк поступило 100 авизо. Подозревают, что среди них 20 фальшивых. Тщательной проверке подвергается 60 случайно отобранных авизо. Чему равна вероятность, что в ходе проверки обнаружится 10 фальшивых?

9 Интегральная формула Лапласа

Если вероятность p появления событий A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то:

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ где } x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \quad (19)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad - \text{ функция Лапласа.}$$

Функция $\Phi(x)$ является нечетной, поэтому $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При значениях $x > 5$ считается $\Phi(x) \approx 0,5$.

Значения функции даны в приложении 3.

На практике интегральная теорема Лапласа применяется в виде:

$$P_n(a < k < b) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Пример. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p=0,85$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 70 раз и не более 95 раз.

Решение. $p=0,85$ $q=1-0,85=0,15$ $n=100$ $a=70$ $b=95$

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0,85}{\sqrt{100 \cdot 0,85 \cdot 0,15}} = \frac{70 - 85}{\sqrt{12,75}} = -\frac{15}{3,75} = -4$$

$$x_2 = \frac{95 - 100 \cdot 0,85}{\sqrt{100 \cdot 0,85 \cdot 0,15}} = \frac{95 - 85}{\sqrt{12,75}} = \frac{10}{3,75} = 2,66$$

$$P_{100}(70 \leq k \leq 95) \approx \Phi(2,66) - \Phi(-4) \approx 0,4961 + 0,499968 = 0,996068$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Производство дает 40% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 600 первосортных изделий окажется от 228 до 252?

2. В инкубаторе вероятность вывода петушка равна 0,5. Определить вероятность того, что из 10000 выведенных цыплят число петушков будет от 4950 до 5150?

3. Фирма выпускает 75 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 300 изделий не менее 280 будут первосортными.